# Lógica Matemática

## 15 *Extensão e completude* ■

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

# Extensão e consistência

No vídeo passado, vimos que

- Uma extensão de $\mathcal{L}$ é um sistema formal obtido pela alteração ou ampliação do conjunto de axiomas de $\mathcal{L}$ de tal modo que todos os teoremas de $\mathcal{L}$ continuam sendo teoremas deste novo sistema.
- Uma extensão de $\mathcal{L}$ é consistente *sse* não existe fórmula $A$ de $\mathcal{L}$ tal que ambas fórmulas $A$ e $(\neg A)$ sejam teoremas dessa extensão.
- $\mathcal{L}$ é consistente.

- Neste vídeo veremos
  - Como obter extensões consistentes
  - Completude

# Obtendo extensões de $\mathcal{L}$ consistentes

TEOREMA 1: Seja $\mathcal{L}^1$ uma extensão consistente de $\mathcal{L}$ e $A$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ que não é teorema de $\mathcal{L}^1$. Então, o sistema $\mathcal{L}^2$, que é uma extensão de $\mathcal{L}$ obtida de $\mathcal{L}^1$ incluindo-se a fórmula $(\neg A)$ como axioma adicional, é consistente.

*Demonstração:*

Seja $A$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ que não é teorema de $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^2$ como dito no teorema.

Vamos supor que $\mathcal{L}^2$ seja inconsistente. Então, pelo resultado do vídeo 14, qualquer fórmula é teorema de $\mathcal{L}^2$, em particular, $\vdash_{\mathcal{L}^2} A$.

Mas $\mathcal{L}^2$ difere de $\mathcal{L}^1$ apenas pelo fato de que o primeiro possui $(\neg A)$ como axioma.

Logo, basta esta nova fórmula em $\mathcal{L}^1$ para deduzirmos $A$ também, isto é, $\neg A \vdash_{\mathcal{L}^1} A$.

TEOREMA 1: Seja $\mathcal{L}^1$ uma extensão consistente de $\mathcal{L}$ e $A$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ que não é teorema de $\mathcal{L}^1$. Então, o sistema $\mathcal{L}^2$, que é uma extensão de $\mathcal{L}$ obtida de $\mathcal{L}^1$ incluindo-se a fórmula $(\neg A)$ como axioma adicional, é consistente.

*Demonstração:*

Temos $\neg A \vdash_{\mathcal{L}^1} A$. Pelo teorema da dedução, segue que $\vdash_{\mathcal{L}^1} (\neg A \to A)$.

No exemplo 3 do vídeo 12, nós vimos que $\vdash_{\mathcal{L}} \big((\neg A \to A) \to A\big)$.

Sendo assim, essa fórmula também deve ser teorema de $\mathcal{L}^1$ (pela própria definição de extensão). Logo, $\vdash_{\mathcal{L}^1} \big((\neg A \to A) \to A\big)$.

Por MP (aplicado nas fórmulas em verde e azul), obtemos $\vdash_{\mathcal{L}^1} A$, contrariando o fato de que $A$ não é teorema de $\mathcal{L}^1$.

Portanto, $\mathcal{L}^2$ deve ser consistente. ■

# Completude

Será que existe um limite de fórmulas que podemos adicionar como axiomas a uma extensão de $\mathcal{L}$ de forma que se mantenha a consistência dos sistemas (extensões) obtidos?

A resposta é *sim*.

Para demonstrar este fato, estabelecemos um novo conceito - completude:

DEFINIÇÃO 1: Uma extensão de $\mathcal{L}$ é *completa* se, para cada fórmula $A$, temos que $A$ ou $(\neg A)$ é um teorema da extensão.

## Completude: algumas consequências imediatas

1. O próprio sistema $\mathcal{L}$ não é completo, já que, por exemplo, uma variável proposicional, digamos, $p_1$, é uma fórmula bem formada, mas tanto $p_1$ quanto $(\neg p_1)$ não são teoremas de $\mathcal{L}$.
2. Qualquer extensão inconsistente de $\mathcal{L}$ é completa. Por quê?
3. Se $\mathcal{L}^c$ é uma extensão consistente e completa de $\mathcal{L}$, então qualquer outra extensão de $\mathcal{L}$ que amplia a classe de teoremas de $\mathcal{L}^c$ é inconsistente.

Ou seja, o item 3 nos diz que, uma vez que tenhamos um sistema completo (e consistente), não há mais como ampliar a classe de teoremas sem perder a consistência.

# Completude: algumas consequências imediatas

TEOREMA 2: Se $\mathcal{L}^c$ é uma extensão consistente e completa de $\mathcal{L}$, então qualquer outra extensão de $\mathcal{L}$ que amplia a classe de teoremas de $\mathcal{L}^c$ é inconsistente.

No próximo vídeo, veremos que é possível "completarmos" uma extensão consistente de $\mathcal{L}$.

*Demonstração:*

Seja $A$ uma fórmula que não é teorema de $\mathcal{L}^c$.

Como $\mathcal{L}^c$ é completo, isto significa que $(\neg A)$ é teorema de $\mathcal{L}^c$.

Assim, $(\neg A)$ também é teorema de qualquer possível extensão de $\mathcal{L}^c$.

Logo, se $A$ fosse teorema dessa extensão, então ele teria tanto $A$ quanto $(\neg A)$ como teoremas, ou seja, seria inconsistente. ■

# Lógica Matemática

# 15 *Extensão e completude* ■

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br